

# EFFET DE LA RELAXATION THERMIQUE SUR L'ACCOMMODATION THERMIQUE ENTRE UN GAZ ET UNE PAROI

T. ANDRE-TALAMON

Laboratoire de Mécanique Physique, 2 Place de la Gare de Ceinture, 78-Saint-Cyr-l'Ecole, France

(Reçu le 19 juin 1970)

**Résumé**—La relaxation thermique limite à une valeur finie le flux thermique initial lors de la mise en contact de deux milieux, comme le ferait une résistance dynamique de contact.

On applique cet effet à l'étude de l'accommodation thermique entre un gaz et une paroi solide.

Les résultats théoriques sont comparés avec les thermogrammes obtenus lors de la réflexion d'une onde de choc sur une sonde à couche mince.

## NOTATIONS

$x$ ,	variable d'espace [m];
$t$ ,	variable de temps [s];
$T$ ,	température [°K];
$\varphi$ ,	densité de flux de chaleur [W/m <sup>2</sup> ];
$\lambda$ ,	conductibilité thermique [J/ms°C];
$C$ ,	chaleur spécifique à pression constante [J/kg °C];
$\rho$ ,	volume spécifique [kg/m <sup>3</sup> ];
$a$ ,	diffusivité thermique: $a = \lambda/c\rho$ [m <sup>2</sup> /s];
$b$ ,	effusivité thermique: $b = \sqrt{(\lambda c\rho)}$ [W(s) <sup>1/2</sup> /°Cm <sup>2</sup> ];
$\gamma$ ,	rapport des chaleurs spécifiques à pression et volume constants;
$\tau$ ,	temps de relaxation thermique [s];
$P$ ,	pression [Pa] ou [Torr = 133,42 Pa];

$$\operatorname{erf}(x), \quad \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du;$$

$$\operatorname{erfc}(x), \quad 1 - \operatorname{erf}(x);$$

$$I_n(x), \quad \text{fonction, de Bessel modifiée de } 1^\circ \text{ espece, d'ordre } n;$$

$$\bar{F}(p), \quad \int_0^\infty e^{-pt} F(t) dt : \text{transformée de Laplace.}$$

## INTRODUCTION

UN DES aspects paradoxaux bien connu de la théorie de la chaleur tient à ce que la mise en contact parfait de deux milieux à des températures différentes, s'accompagne d'une densité de flux thermique initiale infinie.

Vernotte [1] fait remarquer qu'en réalité la mise en contact de deux solides n'est jamais parfaite, subsistant toujours entre les deux milieux un vernis fluide de résistance thermique non nulle. On peut objecter alors que le contact de chacun des deux milieux solides avec le fluide interstitiel peut être considéré comme parfait en sorte que la difficulté du flux initial infini subsiste.

Nous avons fait observer après Vernotte [2, 3] que cet aspect de la théorie de la chaleur, peu compatible avec la réalité physique, n'était dû qu'au fait de négliger l'inertie moléculaire se manifestant plus particulièrement dans le fluide interstitiel.

La description phénoménologique de cette "inertie thermique" à l'aide d'un terme de relaxation dans l'équation du transfert thermique met en évidence l'existence d'une résistance dynamique de contact entre un milieu solide et le fluide au contact.

En aérothermique on rencontre des circon-

stances où cet effet peut prendre une importance notable, étant confrontés avec des phénomènes thermiques rapides, amples, ayant lieu en atmosphère raréfiée.

Nous étudierons dans un premier temps la théorie du contact parfait pour préciser cette notion de résistance dynamique de contact, pour étudier ensuite la théorie de l'accommodation thermique réelle entre un gaz et un solide, théorie que l'on confrontera avec certains résultats expérimentaux obtenus dans les tubes à choc.

### 1. GENERALITES

Nous considérons tout au long de ce travail le contact thermique établi à partir de l'instant  $t = 0$  entre deux milieux semi-infinis d'indices respectifs (1) et (2) séparés par un interface plan, pris comme origine des abscisses, chacun des deux milieux étant pour  $t \leq 0$  à une température initiale uniforme, respectivement  $T_1^\circ$  et  $T_2^\circ = T_1^\circ - \Delta T$ .

L'analyse des champs thermiques de part et d'autre de l'interface sera par conséquent justiciable du traitement unidirectionnel.

Nous réserverons plus particulièrement l'indice (1) au milieu gazeux, situé en  $x > 0$  et l'indice (2), pour  $x < 0$ , au solide en contact avec le gaz.

Les champs respectifs de la température  $T$  et de la densité de flux de chaleur  $\varphi$  sont déterminés à chaque instant par le système constitué par l'équation de conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + C_p \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

et l'équation phénoménologique reliant le flux thermique au gradient de température.

La relation de Fourier consiste à postuler la proportionnalité à chaque instant entre le gradient thermique et la densité de flux de chaleur qui en résulte, c'est-à-dire entre la cause et l'effet :

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \varphi. \quad (2)$$

Si l'on suppose constantes les caractéristiques thermophysiques du milieu considéré (on fera intervenir à défaut des valeurs moyennes) on obtient immédiatement l'équation parabolique linéaire de la diffusion thermique :

$$a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (a = \lambda/C_p). \quad (3)$$

Pour tenir compte de ce que Kaliski [4] appelle "l'inertie thermique", c'est-à-dire en fait la manifestation de l'inertie moléculaire intervenant principalement dans le milieu gazeux, de nombreux auteurs [4-12], proposent d'ajouter à l'équation phénoménologique (2) un terme complémentaire :

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \varphi + \tau \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (4)$$

caractérisant un certain retard entre l'établissement du gradient thermique et l'apparition du flux de chaleur qui en résulte,  $\tau$  étant par définition le temps de relaxation thermique, proportionnel au libre parcours moyen dans le gaz considéré et donc à l'inverse de la pression.

Cette dernière équation, conjuguée avec l'expression du bilan énergétique (1), conduit alors à l'équation hyperbolique linéaire de la propagation thermique :

$$a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \tau \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - \frac{\partial T}{\partial t} = 0. \quad (5)$$

Une perturbation thermique se propage dans un milieu gazeux, d'après (5), avec une célérité finie, indépendante de la pression :

$$V_\tau = \sqrt{\left(\frac{a}{\tau}\right)} = \sqrt{\left(\frac{(\gamma - 1)\lambda T}{\gamma P \tau}\right)}. \quad (6)$$

Les équations (1)-(5) étant par hypothèses linéaires, nous pourrions, dans ce qui suit, leur appliquer la transformation de Laplace.

Le système transformé de (2) et (3) s'écrit :

$$a \frac{d^2 \bar{T}}{dx^2} - p \bar{T} + T^\circ = 0 \quad (7)$$

$$\bar{\varphi} = -\lambda \frac{d\bar{T}}{dx}$$

tandis que le système transformé de (4) et (5) Solide :  $x < 0$   
s'écrit :

$$\begin{aligned} a \frac{d^2 \bar{T}}{dx^2} - p(1 + p\tau) \bar{T} + T^0(1 + p\tau) &= 0 \\ \bar{\varphi}(1 + p\tau) &= -\lambda \frac{d\bar{T}}{dx} \end{aligned} \quad (8)$$

Pour écrire ce dernier système (8) nous avons supposé, ce qui se justifiera par la suite, que l'on a en tout point du milieu considéré :

$$\varphi(x, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_{t=0} = 0. \quad (9)$$

Ces dernières relations ne seront pas satisfaites dans tous les cas à la paroi ( $x = 0$ ) si l'on procède au passage à la limite anticipé. En réalité ces relations (9) seront justifiées si l'on considère plutôt les limites :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_{t=0} = 0.$$

L'intégration des systèmes (7) et (8) est alors immédiate, compte-tenu du fait que  $\bar{\varphi}$  et  $\bar{T}$  demeurent bornées à l'infini

## 2. L'ACCOMMODATION THERMIQUE PARFAITE

Par définition l'accommodation thermique entre deux milieux sera qualifiée de parfaite si à chaque instant de l'histoire du contact, la continuité des températures à la paroi est satisfaite :

$$\lim_{x \rightarrow 0+} T_1(x, t) = \lim_{x \rightarrow 0-} T_2(x, t); \forall t > 0.$$

Nous aurons donc localement les deux systèmes d'équations :

Gaz :  $x > 0$

$$\left. \begin{aligned} a_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} - \frac{\partial T_1}{\partial t} &= 0 \\ \varphi_1 &= -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \end{aligned} \right\} (10)$$

$$\left. \begin{aligned} a_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} - \frac{\partial T_2}{\partial t} &= 0 \\ \varphi_2 &= \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \end{aligned} \right\} (11)$$

à la paroi :

$$\left. \begin{aligned} T_{10} &= T_{20} = T_0(t) \\ \varphi_{10} &= -\varphi_{20} = \varphi_0(t) \end{aligned} \right\} (12)$$

et initialement :

$$\left. \begin{aligned} T_1(x, 0) &= T_1^0; \forall x > 0 \\ T_2(x, 0) &= T_2^0; \forall x < 0. \end{aligned} \right\} (13)$$

Les températures étant bornées à l'infini, nous aurons respectivement :

$$\left. \begin{aligned} \bar{T}_1 - \bar{T}_1^0 &= A(p) \exp \left[ -\sqrt{\left(\frac{p}{a_1}\right)x} \right] \\ \bar{\varphi}_1 &= b_1(\sqrt{p})A(p) \exp \left[ -\sqrt{\left(\frac{p}{a_1}\right)x} \right] \\ \bar{T}_2 - \bar{T}_2^0 &= B(p) \exp \left[ \sqrt{\left(\frac{p}{a_2}\right)x} \right] \\ \bar{\varphi}_2 &= b_2(\sqrt{p})B(p) \exp \left[ \sqrt{\left(\frac{p}{a_2}\right)x} \right] \end{aligned} \right\} (14)$$

En vertu des conditions aux limites (12) nous déduisons, en posant :

$$\begin{aligned} Q &= \frac{b_1}{b_2} = \sqrt{\left(\frac{\lambda_1 C_1 p_1}{\lambda_2 C_2 p_2}\right)} \\ A(p) &= -\frac{1}{1 + Q} \frac{\Delta T}{p}; \quad B(p) = \frac{Q}{1 + Q} \frac{\Delta T}{p}. \end{aligned}$$

Retournant aux originaux, nous obtenons :

$$\left. \begin{aligned} T_1 - T_1^0 &= -\frac{\Delta T}{1 + Q} \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{(a_1 t)}} \\ \varphi_1 &= -\frac{b_1 \Delta T \exp[-(x^2/4a_1 t)]}{1 + Q \sqrt{(\pi t)}} \end{aligned} \right\} (15)$$

$$\left. \begin{aligned} T_2 - T_2^0 &= \frac{Q\Delta T}{1+Q} \operatorname{erfc} \frac{|x|}{2\sqrt{(a_2t)}} \\ \varphi_2 &= \frac{Q}{1+Q} b_2 \Delta T \frac{\exp[-(x^2/4a_2^2t)]}{\sqrt{(\pi t)}} \end{aligned} \right\} (16)$$

$A(p)$  et  $B(p)$  étant déterminés par les conditions à la paroi (12):

$$A(p) = -\Delta T \frac{\sqrt{(p+1/\tau)}}{p[(Q/\sqrt{\tau}) + \sqrt{(p+1/\tau)}]};$$

en particulier à la paroi:

$$T_0(t) = \frac{T_2^0 + QT_1^0}{1+Q} = \text{constante} \quad (17)$$

$$\varphi_0(t) = -\frac{b_1 \Delta T}{1+Q} \frac{1}{\sqrt{(\pi t)}}.$$

On reconnaît là le résultat classique, physiquement inacceptable, de la théorie de la diffusion thermique, à savoir un saut instantané de température, à la paroi, corrélatif d'une densité de flux initiale infinie.

C'est bien pour échapper à cette conclusion, en contradiction avec l'expérience que, renonçant à la continuité des températures à la paroi, on introduit, de façon qui peut sembler *a priori* un peu artificielle, la résistance thermique de contact, dans l'étude du contact thermique entre deux solides ou bien le coefficient d'accommodation dans l'étude de l'accommodation thermique entre un gaz et un solide.

Nous allons voir que sans renoncer à la continuité des températures à la paroi, on peut lever ce paradoxe du flux initial infini en tenant compte de la relaxation thermique se produisant dans le gaz (milieu 1).

Remplaçant le système d'équations (10) par:

$$\left. \begin{aligned} x > 0 \quad \left. \begin{aligned} a_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} - \tau \frac{\partial^2 T_1}{\partial t^2} - \frac{\partial T_1}{\partial t} \\ \varphi_1 + \tau \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = -\lambda \frac{\partial T_1}{\partial x} \end{aligned} \right\} (18) \end{aligned} \right\}$$

tout en conservant le système d'équations (11) et les conditions aux limites (12) et (13), nous obtenons:

$$\left. \begin{aligned} \overline{T_1 - T_1^0} &= A(p) \exp\{- (x/\sqrt{a_1}) \sqrt{[p(1+p\tau)]}\} \\ \overline{\varphi_1} &= \frac{b_1}{\sqrt{\tau}} \sqrt{\left(\frac{p}{p+1/\tau}\right)} A(p) \exp\{- (x/\sqrt{a_1}) \sqrt{[p(1+p\tau)]}\} \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \overline{T_2 - T_2^0} &= B(p) \exp[x\sqrt{(p/a_2)}] \\ \overline{\varphi_2} &= b_2(\sqrt{p}) B(p) \exp[x\sqrt{(p/a_2)}] \end{aligned} \right\} (19)$$

Le retour aux originaux des expressions (19), quoique délicat, peut être obtenu par combinaison de résultats figurant dans les tables de transformées. Le calcul conduit cependant à des longueurs inutiles compte-tenu de la remarque suivante:

L'effusivité thermique d'un solide est d'une façon générale, du fait de la densité et de la conductibilité thermique, très supérieure à l'effusivité thermique d'un gaz, et d'autant plus que la pression de ce dernier est basse.

Pour le quartz:

$$b_2 = 1,4 \cdot 10^3 \quad [\text{J/m}^2 \cdot \text{C} \cdot (\text{s})^{\frac{1}{2}}]$$

Pour le platine:

$$b_2 = 13,8 \cdot 10^3 \quad [\text{J/m}^2 \cdot \text{C} \cdot (\text{s})^{\frac{1}{2}}]$$

tandis que pour l'air à la pression atmosphérique:

$$b_1 = 5,5 \quad [\text{J/m}^2 \cdot \text{C} \cdot (\text{s})^{\frac{1}{2}}].$$

Le facteur  $Q$  est donc généralement de l'ordre de 0,001 à la pression atmosphérique et diminue comme la racine carrée de la pression.

Or dans la transformation de Laplace, la variable  $p$  variant de 0 à l'infini, nous aurons, d'une façon générale:

$$\frac{Q}{\sqrt{\tau}} \ll \sqrt{(p+1/\tau)} = \frac{\sqrt{(1+p\tau)}}{\sqrt{\tau}}$$

Nous intéressent plus particulièrement à l'accommodation thermique entre un gaz et une paroi solide nous pourrions raisonnablement négliger dans ce qui suit  $Q/\sqrt{\tau}$  devant  $\sqrt{(p+1/\tau)}$ , ce qui simplifie considérablement la suite des calculs, le système (19) devenant alors :

part la densité de flux thermique initiale est finie, sa valeur :

$$\varphi_0(0) = \frac{b_1 \Delta T}{\sqrt{\tau}} = \sqrt{\left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{\lambda}{T} \cdot \frac{P}{\tau}\right)} \cdot \Delta T$$

variant comme la pression.

$$\left. \begin{aligned} \overline{T_1 - T_2^0} &\simeq -\frac{\Delta T}{p} \exp\{- (x/\sqrt{a_1}) \sqrt{[p(p\tau + 1)]}\} & \overline{T_2 - T_2^0} &= \frac{Q\Delta T}{\sqrt{\tau}} \exp\left\{x \sqrt{\left(\frac{p}{a_2}\right)}\right\} \\ \bar{\varphi}_1 &\simeq -\frac{b_1 \Delta T \exp\{- (x/\sqrt{a_1}) \sqrt{[p(p\tau + 1)]}\}}{\sqrt{\tau} \sqrt{[p(p+1/\tau)]}} & \bar{\varphi}_2 &= \frac{b_1 \Delta T \exp\left[x \sqrt{(p/a_2)}\right]}{\sqrt{\tau} \sqrt{[p(p+1/\tau)]}} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

équations dont les originaux sont, en ce qui concerne le gaz :

$$\left. \begin{aligned} T_1 - T_1^0 &= -\Delta T \left[ \exp\left(-\frac{x}{2V_T\tau}\right) + \frac{x}{2V_T\tau} \int_{x/2V_T\tau}^{t/2\tau} \exp(-u) \frac{I_1\{\sqrt{[u^2 - (x/2V_T\tau)^2]}\}}{\sqrt{[u^2 - (x/2V_T\tau)^2]}} du \right] \\ \varphi_1 &= -\frac{b_1 \Delta T}{\sqrt{\tau}} \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right) I_0\left\{\sqrt{\left[\left(\frac{t}{2\tau}\right)^2 - \left(\frac{x}{2V_T\tau}\right)^2\right]}\right\} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

si  $t > x/V_T$

et  $T_1 - T_1^0 = \varphi_1 = 0$  si  $t \leq x/V_T$

et quant à la paroi

$$T_0(t) = T_2^0 + Q\Delta T \operatorname{erf} \sqrt{\left(\frac{t}{\tau}\right)^*} \quad (22)$$

$$\varphi_0(t) = \frac{b_1 \Delta T}{\sqrt{\tau}} \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right) I_0\left(\frac{t}{2\tau}\right)$$

On voit par ces expressions (22) que d'une part la température à la paroi croît progressivement jusqu'à sa valeur finale (17) et que d'autre

Ainsi la densité de flux thermique transmis à la paroi est limitée à une valeur finie du fait de l'inertie moléculaire, dont l'importance se fera d'autant plus sentir, au cours des premiers instants de l'accommodation thermique, que la distance inter-moléculaire sera plus grande au sein du gaz.

Pour les valeurs du temps grandes devant  $\tau$ ,  $T_0(t)$  et  $\varphi_0(t)$  tendent très rapidement, comme on peut s'en rendre compte sur les Figs. 1 et 2, vers les expressions asymptotiques (17) obtenues (en négligeant  $Q \ll 1$ ) à partir de l'équation de diffusion (3), c'est-à-dire avec  $\tau = 0$ .

L'expression asymptotique du flux (22) est en effet pour  $t \gg \tau$

$$\varphi_0(t) = \frac{b_1 \Delta T}{\sqrt{(\pi t)}} \left(1 + \frac{\tau}{4t} + \frac{9\tau^2}{32t^2} + \dots\right).$$

Comme nous l'avons déjà fait remarquer [3], on peut dire que tout se passe comme s'il se

\* Le calcul complet à partir des relations (19) donne :

$$T_0(t) - T_2^0 = \frac{Q\Delta T}{1 - Q^2}$$

$$\left[ \operatorname{erf} \sqrt{\left(\frac{t}{\tau}\right)} - Q \left\{ 1 - \exp\left[-(1 - Q^2) \frac{t}{\tau}\right] \operatorname{erfc} \left[ Q \sqrt{\left(\frac{t}{\tau}\right)} \right] \right\} \right]$$

trouvait entre le gaz et la paroi une résistance limitant le flux initial à la valeur dynamique de contact :

$$R_D = \frac{\sqrt{\tau}}{b_1} \sqrt{\left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \cdot \frac{T}{\lambda} \cdot \frac{\tau}{P}\right)} \quad (23)$$

$$\varphi_0(0) = \frac{\Delta T}{R_D}$$

Plus précisément si l'on considère le contact

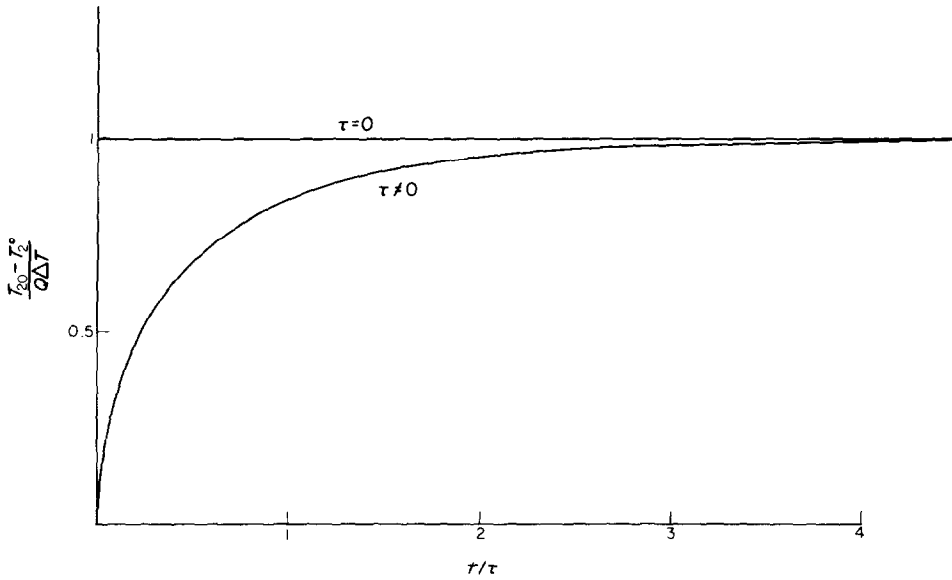


FIG. 1.

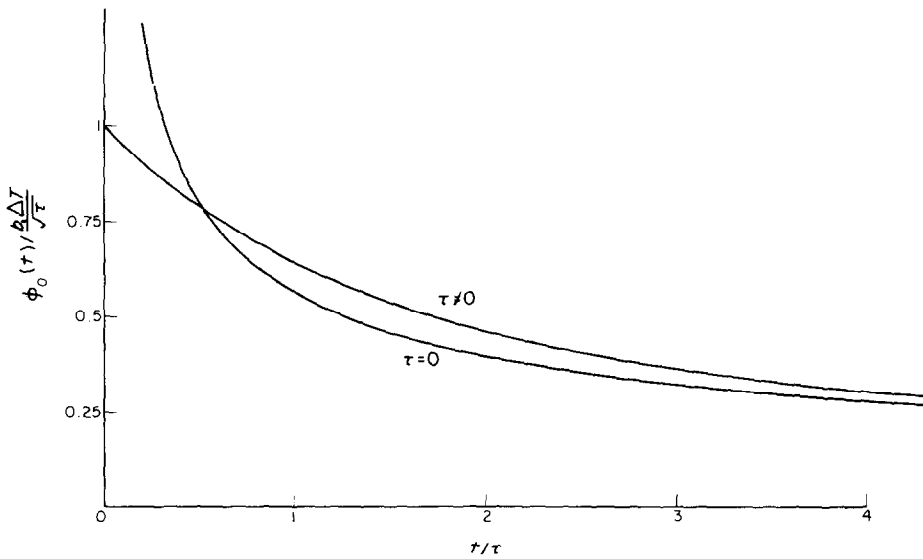


FIG. 2.

thermique entre deux solides, le flux thermique transféré de l'un à l'autre sera limité par la résistance de contact dépendant pour une bonne part de la microgéométrie du contact (résistance de constriction) mais aussi du fluide interstitiel pour lequel la relaxation thermique interviendra de façon notable.

Si par exemple le fluide interstitiel est de l'air atmosphérique, prenant  $\tau$  de l'ordre de dix fois au moins le temps d'un libre parcours moyen :

$$\tau \simeq 1,34 \cdot 10^{-9} [\text{s}].$$

$$b_1 \simeq 5,5 [\text{J}/\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C} \cdot (\text{s})^{\frac{1}{2}}].$$

La résistance dynamique de contact vaudra dans ces conditions :

$$R_D \simeq 0,067 [\text{cm}^2 \cdot ^\circ\text{C}/\text{W}]$$

cette résistance croissant d'ailleurs comme l'inverse de la pression.

On pourra rapprocher cette valeur des résultats de Laurent *et al.* [13] qui, mesurant la résistance de contact entre deux solides en utilisant la méthode du signal bref, trouvent une résistance thermique systématiquement plus élevée que celle mesurée en régime permanent. Nous reproduisons ci-après ces résultats :

Signal bref (incertitude : 5 pour cent)

R en :  $^\circ\text{C} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{W}^{-1}$  à  $25^\circ\text{C}$

Régime Permanent (incertitude : 5 pour cent)

R en :  $^\circ\text{C} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{W}^{-1}$  à  $25^\circ\text{C}$  :

### 3. ACCOMMODATION THERMIQUE IMPARFAITE

#### (a). Généralités

L'étude de l'accommodation thermique parfaite suppose implicitement que l'on a mis en contact deux milieux continus, au sens de l'hydrodynamique. Lorsque l'on considère l'accommodation entre un gaz et une paroi on sait, après Knudsen, qu'une telle hypothèse ne peut plus être maintenue au voisinage immédiat

de la paroi, et que les conditions aux limites (12) doivent être remaniées.

Au sein du gaz, les interactions que subit une molécule de la part des autres molécules, entre deux chocs consécutifs, sont négligeables. A une distance de la paroi de l'ordre de 100 libres parcours moyens, le gaz se comporte vis à vis de celle-ci comme un milieu continu. Au fur et à mesure que l'on se rapproche de la paroi, les chocs intermoléculaires deviennent négligeables par rapport à ceux qui ont lieu entre les molécules et la paroi, rendant prépondérant le caractère discontinu du gaz.

Ainsi, d'après Knudsen, on considère le gaz comme parfait loin de la paroi, auquel on appliquera les lois de l'hydrodynamique et donc le système d'équations (10), séparé de la paroi par une couche d'épaisseur  $\sigma$ , dite couche de Knudsen, dans laquelle s'effectue l'accommodation thermique.

On caractérise cette dernière par le coefficient d'accommodation [14] :

$$r = \frac{E_r - E_i}{E_p - E_i}$$

Contact			
N° 1	N° 2	N° 3	N° 4
1,97	2,94	0,033	2,19
1,78	2,90	0,033	2,15

$E_i$  : flux d'énergie transportée par les molécules incidentes

$E_r$  : flux d'énergie transportée par les molécules réémises

$E_p$  : flux d'énergie transportée par les molécules si elles avaient été réémises à la température de la paroi.

Ce coefficient est en général inférieur à l'unité,

en sorte que tout se passe comme s'il y avait à la paroi un saut de température :

$$T_{10} - T_{20} = \sigma \left( \frac{\partial T_1}{\partial x} \right)_{x=0}. \quad (24)$$

La théorie cinétique [14] permet de relier l'épaisseur  $\sigma$  au coefficient d'accommodation  $r$  :

$$\begin{aligned} \sigma &= 4,07 \frac{a_1}{\bar{v}} \frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{2-r}{r} \\ &= 1,996 \frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{2-r}{r} \frac{l}{\mathcal{P}} \end{aligned} \quad (25)$$

l'accommodation thermique :

$$\theta = \frac{1}{(1+Q)^2} \frac{\sigma^2}{a_1} \simeq \frac{\sigma^2}{a_1} \quad (27)$$

Le système d'équations (10), (11), (13) et (26) conduit aux mêmes relations (14) avec cette fois-ci :

$$A(p) = \frac{\Delta T}{1+Q} \frac{1}{p[1+\sqrt{(p\theta)}]} \quad B(p) + -Q A(p).$$

Les originaux des expressions (14), sont ici, pour ce qui concerne le gaz :

$$\left. \begin{aligned} T_1 - T_1^0 &= -\frac{\Delta T}{1+Q} \left\{ \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{(a_1 t)}} - \exp \left[ \frac{x}{\sqrt{(a_1 \theta)} + \frac{t}{\theta}} \right] \operatorname{erfc} \left[ \frac{x}{2\sqrt{(a_1 t)}} + \sqrt{\left( \frac{t}{\theta} \right)} \right] \right\} \\ \varphi_1 &= -\frac{b_1 \Delta T}{\sqrt{\theta}} \exp \left[ \frac{x}{\sqrt{(a_1 \theta)} + \left( \frac{t}{\theta} \right)} \right] \operatorname{erfc} \left[ \frac{x}{2\sqrt{(a_1 t)}} + \sqrt{\left( \frac{t}{\theta} \right)} \right] \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

et à la paroi :

$$\left. \begin{aligned} T_{20} - T_2^0 &= Q \Delta T \left[ 1 - \exp \left( \frac{t}{\theta} \right) \operatorname{erfc} \sqrt{\left( \frac{t}{\theta} \right)} \right] \\ \varphi_0(t) &= -\frac{b_1 \Delta T}{\sqrt{\theta}} \exp \left( \frac{t}{\theta} \right) \operatorname{erfc} \sqrt{\left( \frac{t}{\theta} \right)} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

$\bar{v}$  ; vitesse moléculaire moyenne

$l$  ; libre parcours moyen

$\gamma$  ; rapport des chaleurs spécifiques

$\mathcal{P}$  ; nombre de Prandtl.

(b) *Accommodation thermique imparfaite, sans relaxation thermique*

Remplaçant les conditions aux limites (12) par :

$$\left. \begin{aligned} T_{10} - T_{20} &= -\frac{\sigma}{\lambda_1} \varphi_0(t) \\ \varphi_{10}(t) &= -\varphi_{20}(t) = \varphi_0(t) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

et faisant intervenir la constante de temps de

(c) *Confrontation avec l'expérience*

Comme nous le verrons plus loin, les expressions (29) ont pu être vérifiées avec précision, pour des temps supérieurs à  $\theta$ , dans des expériences réalisées avec des tubes à choc. Toutefois la confrontation avec l'expérience s'avère médiocre pour les temps courts et d'autant plus que :  $t < \theta$ .

La plupart des expérimentateurs [15, 16] s'accordent pour observer que la pente à l'origine des thermogrammes n'est pas infinie comme l'indique l'équation (29) et qu'en outre le flux thermique est nul pour  $t = 0$ .



Nous examinerons plus en détail, dans ce qui suit, l'aspect expérimental de la question de l'accommodation entre gaz et paroi.

(d) *Influence de la relaxation thermique*

Cette divergence, pour les temps courts, entre les expressions (29) et l'expérience provient sans doute, du fait que l'on néglige les effets de l'inertie moléculaire au sein du gaz.

Une première tentative pour tenir compte de ces effets a été entreprise par Fiszdon et Lubonski [16] qui tout en conservant au sein des deux milieux les équations de diffusion (10 et (11) proposent de modifier les conditions à la paroi (26) en leur adjoignant un terme complémentaire :

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{10} &= -\varphi_{20} = \varphi_0(t) \\ T_{10} - T_{20} &= \sigma \left( \frac{\partial T_1}{\partial x} \right)_{x=0} - \tau \left( \frac{\partial T_1}{\partial t} \right)_{x=0} \end{aligned} \right\} (30)$$

$\tau$  étant ici une constante de temps sensiblement de l'ordre du temps mis par les molécules à franchir la couche de Knudsen :

$$\tau \simeq \frac{\sigma}{\bar{v}}$$

Les auteurs cités ne donnent pas d'autre justification de ce terme complémentaire qu'un bon ajustement des résultats expérimentaux avec les expressions théoriques résultant de telles conditions aux limites (30).

Le système d'équations (10) et (11) conduit aux solutions (14) avec cette fois-ci :

$$A(p) = \frac{\Delta T}{\tau} \frac{1}{p[(\sqrt{p} + 1/\sqrt{\tau_1})[(\sqrt{p} + 1/\sqrt{\tau_2})]$$

$$B(p) = -QA(p)$$

ayant posé :

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= (1 + Q) \frac{\theta}{\tau} \simeq \frac{\theta}{\tau} \\ \frac{1}{\tau_{1,2}} &= \frac{(1 + Q)\alpha}{4\tau} \left[ 1 \mp \sqrt{\left(1 - \frac{4}{\alpha}\right)^2} \right] \end{aligned} \right\} (31)$$

Nous voyons apparaître le caractère artificiel de la condition à la paroi (30). L'expression (31) ci-dessus n'a de sens en effet que si :

$$\theta > 4\tau.$$

On ne voit pas très bien la signification physique d'une telle coupure dans les solutions possibles du système d'équations (10) et (11).

Néanmoins on retourne sans peine aux originaux :

$$\begin{aligned} T_{20} - T_2^0 &= \frac{Q\Delta T}{(\sqrt{\tau_1} - \sqrt{\tau_2})} \left\{ \sqrt{\tau_1} \left[ 1 - \exp\left(\frac{t}{\tau_1}\right) \operatorname{erfc} \sqrt{\left(\frac{t}{\tau_1}\right)} \right] - (\sqrt{\tau_2}) \right. \\ &\quad \left. \left[ 1 - \exp\left(\frac{t}{\tau_2}\right) \operatorname{erfc} \sqrt{\left(\frac{t}{\tau_2}\right)} \right] \right\} \\ \varphi_0(t) &= -\frac{b_1\Delta T}{(\sqrt{\tau_1} - \sqrt{\tau_2})} \\ &\quad \left[ \exp\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right) \operatorname{erfc} \sqrt{\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)} - \exp\left(\frac{t}{\tau_2}\right) \operatorname{erfc} \sqrt{\left(\frac{t}{\tau_2}\right)} \right] \end{aligned} \quad (32)$$

Le flux thermique initial est bien nul, et la pente de la température de la paroi, à l'origine  $t = 0$ , est :

$$\left( \frac{\partial T_{20}}{\partial t} \right)_{t=0} = \frac{Q\Delta T}{\sqrt{(\tau_1\tau_2)}} = \frac{Q}{1 + Q} \frac{\Delta T}{\tau}$$

Ce résultat quoique quantitativement satisfaisant, n'est toutefois pas cohérent. En effet, outre la remarque ci-dessus sur une éventuelle coupure dans les solutions possibles, le calcul fait intervenir la relaxation thermique dans la seule couche de Knudsen, alors qu'en fait c'est dans toute la masse du gaz qu'elle intervient.

Ainsi, si l'on remplace le système (10) par le système (18) tout en conservant au voisinage de la paroi l'approximation de Knudsen sous la forme (24), on est conduit, en négligeant là encore  $Q$  devant 1 pour éviter des longueurs

inutiles, aux relations (19), avec cette fois-ci :

$$A(p) = -\frac{\Delta T}{p\{1 + (1 + Q)\sqrt{(\theta\tau)}\sqrt{[p(p + 1/\tau)]}\}}$$

$$B(p) = -\frac{Q}{\sqrt{\tau}} \frac{A(p)}{\sqrt{p + 1/\tau}}$$

Retournant aux originaux, nous obtenons, tous calculs faits :

Les fonctions  $u(x, y)$  et  $v(x, y)$  sont tabulées dans [17]; le développement de la fonction d'erreur de la variable imaginaire pure est :

$$\operatorname{erf} j\sqrt{x} = j\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{x}e^{+x} \left[ 1 - \frac{2x}{1.3} + \dots + (-1)^n \frac{(2x)^n}{1.3\dots(2n+1)} + \dots \right]$$

$$\frac{T_{20} - T_2^0}{Q\Delta T} = \operatorname{erf} \sqrt{\left(\frac{t}{\tau}\right)} + \frac{\sqrt{(\tau_1\tau_2)}}{\tau_1 + \tau_2} \left[ \sqrt{\left(\frac{\tau_1}{\tau}\right)} \exp\left(\frac{t}{\tau_1}\right) \operatorname{erf} \sqrt{\left(\frac{t}{\tau_1}\right)} - \sqrt{\left(\frac{\theta}{\tau_2}\right)} \exp\left(\frac{t}{\tau_1}\right) \operatorname{erf} \sqrt{\left(\frac{t}{\tau_2}\right)} \right. \\ \left. + j\sqrt{\left(\frac{\tau_2}{\tau}\right)} \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right) \operatorname{erf} j\sqrt{\left(\frac{t}{\tau_2}\right)} + j\sqrt{\left(\frac{\theta}{\tau_1}\right)} \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right) \operatorname{erf} j\sqrt{\left(\frac{t}{\tau_1}\right)} \right] \quad (33)$$

$$\varphi_0(t) = \frac{b_1\Delta T}{\sqrt{\theta}} \frac{\exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right)}{\sqrt{\left(1 + \frac{4}{\alpha}\right)}} \left\{ \operatorname{sh} \left[ \frac{t}{2\tau} \sqrt{\left(1 + \frac{4}{\alpha}\right)} \right] - \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \int_0^{t/2\tau} \operatorname{sh} \left[ \left(\frac{t}{2\tau} - u\right) \sqrt{\left(1 + \frac{4}{\alpha}\right)} \right] I_0(u) du \right\} \quad (34)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= (1 + Q)^2 \frac{\theta}{\tau} \simeq \frac{\theta}{\tau} \\ \frac{1}{\tau_{1,2}} &= \frac{1}{2\tau} \left[ \sqrt{\left(1 + \frac{4}{\alpha}\right)} \mp 1 \right] \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Remarque 1. La fonction d'erreur de la variable complexe se définit ainsi :

$$w(z) = u(x, y) + jv(x, y)$$

$$= e^{-z^2} \left[ 1 + j\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{x^2} dx \right]$$

avec

$$z = x + jy \quad \text{et} \quad \operatorname{erfc}(z) = e^{-z^2} w(jz).$$

de telle sorte que :

$$u(x, 0) = e^{-x^2}$$

$$v(x, 0) = -j e^{-x^2} \operatorname{erf}(jx).$$

Remarque 2. Quand  $\tau \rightarrow 0$ ,  $\tau_1 \rightarrow \theta$  et  $\tau_2 \rightarrow \tau \rightarrow 0$ , on voit immédiatement que la relation (33) prend la même expression que (29). On démontre sans peine qu'il en est de même pour la densité de flux. Semblablement quand  $\theta \rightarrow 0$ ,  $\tau_1$  et  $\tau_2$  tendent simultanément vers zéro comme  $\sqrt{\theta}$  et l'on retrouve les expressions (22) du contact parfait.

A la différence des expressions (32), les expressions (33) et (34) sont valables quelle que soit la valeur du coefficient  $\alpha$ . La pente à l'origine  $t = 0$ , de la température de la paroi est nulle, comme on pourra la vérifier, de même que la densité de flux à l'origine, ce qui justifie, a posteriori, les conditions (9).

On voit sur les Figs. 3 et 4 que les expressions (33) et (34) de la température de paroi, et du flux transmis, tendent rapidement vers les expressions (29) obtenue directement en négligeant la relaxation thermique, la différence entre ces expressions étant surtout affirmée pour des temps inférieurs à la constante d'accommodation thermique  $\theta$ .

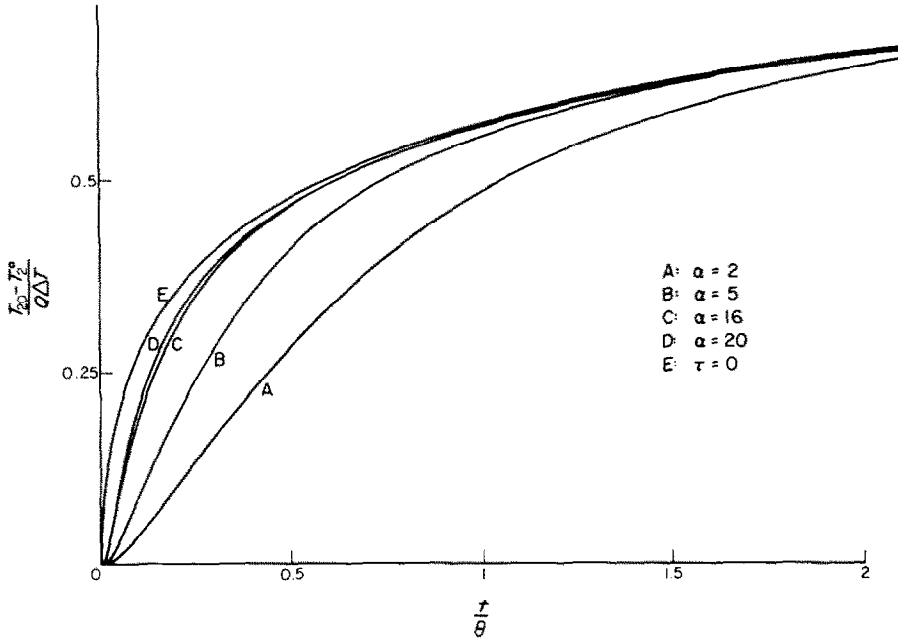


FIG. 3.

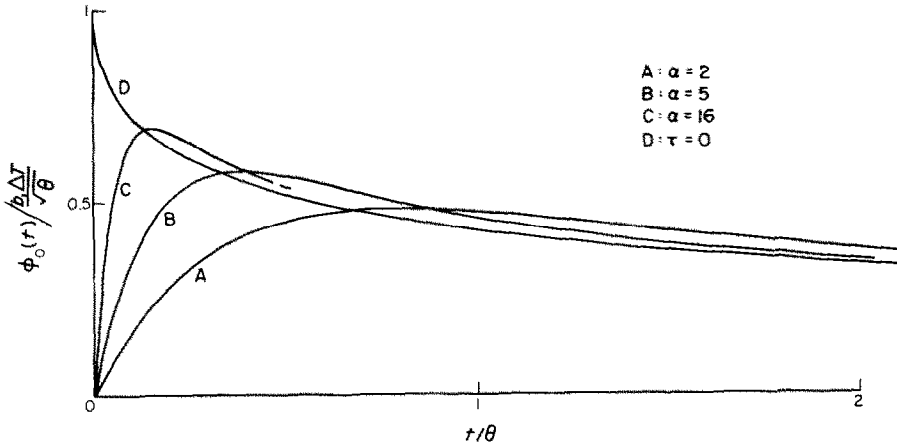


FIG. 4.

#### 4. REFLEXION D'UNE ONDE DE CHOC SUR UNE PAROI

La théorie de l'accommodation thermique entre un gaz et une paroi trouve application en particulier dans la technologie des tubes à choc.

Quand l'onde de choc primaire se réfléchit à l'extrémité fermée d'un tube à choc, l'onde réfléchie laisse derrière elle, en contact avec la

paroi, un gaz immobile dont la température s'est élevée brusquement [18] au moment de la réflexion, en moins de  $0,1 \mu s$ .\*

Baganoff [20] a montré que la pression était

\* Comme l'ont montré les travaux de Liepmann et Bowman [19] le temps de montée de la température est lié à la concavité de l'onde primaire incidente.

pratiquement constante au voisinage de la paroi, derrière l'onde réfléchie. Clarke et Busing [15] enfin, ont montré que la variation des caractéristiques thermophysiques du gaz, en fonction de la température (dilatation à pression constante du gaz, variation de la conductibilité thermique, etc., ...) n'affectait pratiquement pas les résultats obtenus à partir des équations linéarisées.

La paroi, initialement en équilibre thermique avec le gaz, se trouve soumise à un échelon de température dans les conditions définies par les équations (13) utilisées tout au long de ce travail.

Pour mesurer la température de la paroi, on utilise des sondes à film de platine. Un dépôt de platine d'une épaisseur de l'ordre de  $0,1 \mu$  est déposé par évaporation sous vide sur un substrat de quartz. La mesure de la résistance électrique du dépôt, fournit, après étalonnage, la température instantanée de la paroi, la constante de temps du capteur ainsi constitué étant généralement inférieure à une fraction de microsecondes.

Le flux transmis à la paroi est indirectement déduit de la température de la paroi par un dispositif analogique.

L'analyse des enregistrements ainsi obtenus permet de déterminer les ordres de grandeur relatifs de la constante de temps d'accommodation thermique  $\theta$  et le temps de relaxation thermique  $\alpha$ .

Les résultats expérimentaux analysés par Fizdon et Lubonski [16] ont été obtenus sur le tube à choc de 17 pouces du California Institute of Technology.

Par exemple un enregistrement effectué dans l'hélium, dans les conditions suivantes :

$$T_1^0 = 302^\circ\text{K}$$

vitesse de l'onde de choc incidente :  $M_s = 2,85$

pression avant le choc :  $P_1 = 0,1$  Torr

pression après le choc :  $P = 4,16$  Torr

fournit les résultats suivants :

Constante de temps d'accommodation thermique :

$$\theta = 46 \cdot 10^{-6}\text{s.}$$

Coefficient d'accommodation

$$r = 0,225.$$

Après tracé systématique du réseau de courbes (33) en fonction du paramètre  $\alpha$ , on obtient un bon ajustement de la relation (33) avec l'enregistrement en question pour :

$$\tau \approx \frac{\sigma}{\bar{v}}.$$

C'est-à-dire d'après (25) et (27) :

$$\alpha = \frac{\theta}{\tau} = 4,07 \frac{\gamma}{\gamma + 1} \frac{2 - r}{r} \approx 20$$

$$(\gamma = \frac{5}{3}, r = 0,225).$$

Le temps de relaxation thermique est donc de l'ordre de grandeur du temps moyen mis par les molécules à franchir la couche de Knudsen d'épaisseur  $\sigma$ , ce qui confirme l'observation de Fizdon et Lubonski.

On remarquera que pour un gaz donné, le coefficient  $\alpha$  est indépendant de la pression.

Dans le cas particulier analysé ici, et dans les conditions ramenées à la pression atmosphérique :

$$\sigma \approx 2,5 \cdot 10^{-6}\text{m} \approx 14 \text{ livres parcours moyens}$$

$$\tau \approx 2 \cdot 10^{-9}\text{s.}$$

La vitesse de propagation (6) d'une perturbation thermique dans l'hélium, correspondant à cette valeur de  $\tau$ , sera dans ces conditions

$$V_T \approx 275 \text{ m/s.}$$

#### BIBLIOGRAPHIE

1. P. VERNOTTE, Théorie continue et théorie moléculaire des phénomènes thermocinétiques, *C.R. Acad. Sci.* **227**, 43-45 (1948).
2. P. VERNOTTE, La véritable équation de la chaleur, *C.R. Acad. Sci.* **247**, 2103-2104 (1958).
3. T. ANDRE-TALAMON, Effet de la relaxation thermique sur le contact thermique *C.R. Acad. Sci.* **271B**, 393-396 (1970).
4. S. KALISKI, Wave equation of heat conduction. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sc. Tech.* no 1, 19-25 (1965).
5. C. CATTANEO, Sur une forme de l'équation de la chaleur éliminant le paradoxe de la propagation instantanée, *C.R. Acad. Sci.* **247**, 431-432 (1958).

6. J. TAVERNIER, Les bases physiques de la transmission de la chaleur par conduction dans les solides, *Rev. Gén de Thermique* n° 1, 19–25 (1962).
7. A. V. LUIKOV, Application of irreversible thermodynamics methods to investigation of heat and mass transfer, *Int. J. Heat Mass Transfer* 9, 139–152 (1966).
8. H. D. WEYMANN, Finite speed of propagation in heat conduction diffusion and viscous shear motion, *Am. J. Phys.* 35, 488–496 (1967).
9. BORIVOJE B. MIKIC, A model rate equation for transient thermal conduction, *Int. J. Heat Mass Transfer* 10, 1899–1904 (1967).
10. M. E. GURTIN and A. C. PIPKIN, A general theory of heat conduction with finite wave speeds, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 31 (2), 113–126 (1968).
11. K. J. BAUMEISTER and T. D. HAMILL, Hyperbolic heat conduction—a solution for the semi-infinite body problem, *J. Heat Transfer* 91C, 543–548 (1969).
12. T. ANDRE-TALAMON, La propagation d'une onde thermique dans un milieu non linéaire, *C.R. Acad. Sci.* 269B, 101–104 (1969).
13. M. LAURENT, J. L. MACQUERON, A. GERY and G. SENICKI, La méthode du signal bref appliquée à la mesure des résistances de contact, *C.R. Acad. Sci.* 265, 1369–1371 (1967).
14. P. F. M. DEVIENNE, Conduction thermique dans les gaz raréfiés, coefficient d'accommodation, *Mem. Sci. Phys.* 56 Gauthier-Villars, Paris (1943).
15. S. R. BUSING and S. F. CLARKE, Some reflection and surface effects in the shock tube, Recent Advances in Aerothermo-chemistry, *AGARD, Conf. Proc.* 1, N° 12 165–190 (1967).
16. W. FISZDON and J. LUBONSKI, A hypothesis concerning the non stationary temperature-jump at the gas–solid interface, *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sc. Tech.* 17, 225–229 (1909).
17. H. S. CARSLAW and J. C. JAEGER, *Conduction of Heat in Solids*, p. 486. Oxford Univ. Press, London (1959).
18. H. T. NAGAMATSU, *Shock Tube Technology Design—Fundamental Data Obtained from Shock-tube Experiments*. Pergamon Press, Oxford (1961).
19. H. W. LIEPMANN and R. M. BOWMAN, *Physics Fluids* 7, 2013–2015 (1964).
20. D. BAGANOFF, *J. Fluid Mech.* 23, 209–228 (1965).

#### EFFECT OF THERMAL RELAXATION ON THE THERMAL ACCOMMODATION BETWEEN A GAS AND A SOLID

**Abstract**—The thermal relaxation limits to a finite value the initial heat-flux when connecting two mediums, as a dynamic contact resistance would do.

This effect is applied to the study of thermal accommodation between a gas and a solid wall.

The theoretical results are compared to the thermograms obtained when a shock wave is reflecting on a thin film resistance gauge.

#### WIRKUNG DES THERMISCHEN AUSGLEICHS AUF DEN WÄRMEAUSTAUSCH ZWISCHEN EINEM GAS UND EINEM FESTKÖRPER

**Zusammenfassung**—Wenn zwei Medien miteinander in Kontakt gebracht werden, begrenzt der thermische Ausgleich die anfängliche Grösse des Wärmestroms auf einen endlichen Wert wie ein dynamischer Kontaktwiderstand.

Dieser Effekt wird auf das Studium des thermischen Ausgleichs zwischen einem Gas und einem Festkörper angewandt. Die theoretischen Ergebnisse werden mit Thermogrammen verglichen, die aus der Reflektion einer Stosswelle auf einem Dünnschichtwiderstandsmesser erhalten werden.

#### ВЛИЯНИЕ ТЕРМИЧЕСКОЙ РЕЛАКСАЦИИ НА ТЕПЛОВУЮ АККОМАДАЦИЮ МЕЖДУ ГАЗОМ И ТВЕРДЫМ ТЕЛОМ

**Аннотация**—При наличии динамического контактного сопротивления термическая релаксация уменьшает величину начального теплового потока при соединении двух сред.

Этот эффект можно использовать для изучения тепловой аккомодации между газом и твердой стенкой. Приводится сопоставление результатов с термограммами, полученными при отражении ударной волны на тонком пленочном сопротивлении.